یونٹ 6

بنیادی شماریات
(BASIC STATISTICS)

طلباء اس یونٹ کو پڑھنے کے بعد درجِ ذیل باتوں سے واقف ہوں گے

- تعددی تقسیم کی تشکیل
- کالمی نقشہ کی تشکیل یکساں اور غیر یکساں جماعتی وقفہ کے ساتھ
- تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل
- مجموعی تعددی تقسیم کی تشکیل
- مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل
- حسابی اوسط (غیر گروہی اور گروہی مواد کیلئے) معلوم کرنا
  - حسابی اوسط کی بنیادی تعریف اور ضربی حسابی اوسط سے انحراف کا طریقہ استعمال کرتے ہوئے
  - حسابی اوسط کی خصوصیات کی پہچان
- وزنی حسابی اوسط اور حرکتی (حسابی) اوسط معلوم کرنا
- وسطانیہ، اور عادہ کو بذریعہ گراف معلوم کرنا
- سعت، تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کرنا

6.1 تعددی تقسیم (Frequency Distribution)

خام مواد کو منظم یک طرفہ جدول کی صورت میں پیش کرنے کو **تعددی تقسیم** کہتے ہیں۔ اس جدول میں تمام مدّات/رقموں کو مختلف گروہوں یا جماعتوں میں تقسیم کر دیا جاتا ہے اور ہر گروہ کے مقابل اس میں آنے والی مدّات کی تعداد کو لکھا جاتا ہے۔

6.1(i) تعددی تقسیم کی تشکیل: (Construction of Frequency Distribution)

تعددی تقسیم کے مواد کی اقسام کی بنیاد پر دو قسمیں ہیں۔

(a) غیر مسلسل تعددی تقسیم (b) مسلسل متغیر تعددی تقسیم

(a) غیر مسلسل تعددی تقسیم: (Discrete Frequency Distribution)

غیر مسلسل تعددی تقسیم تشکیل دینے کا طریقہ کار درج ذیل ہے:

(i) سب سے چھوٹی اور سب سے بڑی مد معلوم کریں۔ نیز جدول کے متغیر والے چھوٹی سے بڑی تک تمام مدّات کو ترتیب وار کالم میں لکھیں۔

(ii) مدّات کو شمار کر کے مطابقت (ٹیلی نشان) (Tally bar) کی مدد سے ان کی تعداد کو لکھیں۔

(iii) مطابقت کالم کی مدد سے تعددات کا کالم بنائیں۔

مثال 1: پانچ سکّوں کو بیس مرتبہ اُچھالا گیا اور ہیڈز (Heads) کی تعداد کو نوٹ کیا گیا جو کہ درجِ ذیل ہے۔

3, 4, 2, 3, 3, 5, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 4, 2, 2, 3, 3, 4, 2

ہیڈز (Heads) کی تعداد کی تعددی تقسیم بنائیں۔

حل: فرض کریں X = ہیڈز (Heads) کی تعداد

1 = سب سے چھوٹی رقم اور 5 = سب سے بڑی رقم

تعددی تقسیم درجِ ذیل ہے۔

ہیڈز (Heads) کی تعداد کی تعددی تقسیم		
X	ٹیلی کا نشان	تعدد
1	III	3
2	~~IIII~~ III	8
3	~~IIII~~	5
4	III	3
5	I	1

(b) مسلسل تعددی تقسیم: (Continuous Frequency Distribution)

مسلسل تعددی تقسیم تشکیل دینے کا طریقہ کار درج ذیل ہے:

(i) سعت معلوم کریں جبکہ

سب سے چھوٹی مد − سب سے بڑی مد = سعت

(سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی مد کا فرق)

(ii) گروہوں کی تعداد کا فیصلہ کریں۔ عموماً یہ تعداد 5 اور 20 کے درمیان کوئی ساعدد ہو سکتا ہے اور اس کو 'k' سے ظاہر کرتے ہیں۔ سعت کے زیادہ ہونے سے گروہ بھی زیادہ ہوں گے۔ عام طور پر اس کا انحصار سعت پر ہوتا ہے۔

(iii) گروہی یا جماعتی وقفہ کو بذریعہ کلیہ نکالیں۔ اس کو 'h' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

جماعتی وقفہ = h ، جماعتوں کی تعداد = k

$$h = \frac{\text{سعت}}{k}$$ (کلیہ استعمال کریں جب 'h' نہ دیا ہو)

نوٹ: تخمینہ کے کلیہ میں h کو معلوم کرنے کے لیے سہولت دی جاتی ہے۔ مثال کے طور پر $h = 7.1$ یا $h = 7.9$ کو 8 لیا جاتا ہے۔

(iv) جدول میں جماعتی وقفہ کا کالم بنائیں۔ سب سے چھوٹی مد سے شروع کریں اور جماعتی وقفہ 'k' کو مدنظر رکھتے ہوئے جماعتی حدوں کی مدد سے تمام جماعتی وقفے لکھیں حتیٰ کہ آخری جماعتی وقفہ میں سب سے بڑی مد شامل ہو جائے۔

(v) مواد سے مدات کو بذریعہ مطابقت یعنی ٹیلی نشان (عمودی لائنوں) سے نوٹ کریں۔

(vi) ہر ایک گروہ کے سامنے ٹیلی نشان کو گنا جائے اور پھر اس تعداد کو تعدد کے کالم میں متعلقہ گروہ یا جماعت کے مقابل لکھا جائے۔

مثال 2: ایک جماعت دہم 'X' کے چالیس (40) طالب علموں نے ریاضی میں جو نمبرز لیے وہ مندرجہ ذیل ہیں۔

51, 55, 32, 41, 22, 30, 35, 53, 30, 60, 59, 15, 7, 18, 40, 49, 40, 25, 14, 18,19, 2,
43, 22, 39, 26, 34, 19, 10, 17, 47, 38, 13, 30, 34, 54, 10, 21, 51, 52

10 کا جماعتی وقفہ لے کر ایک تعددی تقسیم تشکیل کریں۔

حل: فرض کریں کہ طالبعلم کے نمبرز = X

اوپر دیے گئے مواد کے مطابق،

سب سے چھوٹی مد = 2 اور سب سے بڑی مد = 60

چونکہ ہمیں جماعتی وقفہ رقم میں دس (10) دیا گیا ہے لہٰذا ہم آسانی کے لئے زیریں (نچلی) جماعتی حد کو یا تو دو (2) سے شروع کریں گے یا اس کے قریب ترین صحیح عدد صفر (0) سے شروع کریں گے۔ تعددی تقسیم مندرجہ ذیل دو طریقوں سے بنائی جا سکتی ہے۔

پہلا طریقہ: ہم اصل مد کو اُس کی متعلقہ جماعت/گروہ میں مندرجہ ذیل طریقے سے لکھیں گے۔

تعددات	مدات	جماعت/گروہ
2	2, 7	0 —— 9
10	10, 10, 13, 14, 15, 17, 18, 18, 19, 19	10 —— 19
5	21, 22, 22, 25, 26	20 —— 29
9	30, 30, 30, 32, 34, 34, 35, 38, 39	30 —— 39
6	40, 40, 41, 43, 47, 49	40 —— 49
7	51, 51, 52, 53, 54, 55, 59	50 —— 59
1	60	60 —— 69

دوسرا طریقہ: ہر مد کو اُس کے متعلقہ گروہ میں ٹیلی نشان (عمودی لائنوں) کو استعمال کرتے ہوئے مندرجہ ذیل طریقہ سے لکھیں گے۔

تعددات	ٹیلی نشان	گروہ/جماعت
2	II	0 —— 9
10	~~IIII~~ ~~IIII~~	10 —— 19
5	~~IIII~~	20 —— 29
9	~~IIII~~ IIII	30 —— 39
6	~~IIII~~ I	40 —— 49
7	~~IIII~~ II	50 —— 59
1	I	60 —— 69
40		کل تعداد

نوٹ: دوسرا طریقہ عموماً تعددی تقسیم کی تشکیل کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

مسلسل تعددی جدول میں استعمال ہونے والے تصورات

مسلسل تعددی جدول میں زیادہ تر مندرجہ ذیل اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں۔

(a) جماعتی حدود: (Class Limit)

ہر جماعت یا گروہ میں دو قیمتیں ہوتی ہیں ایک چھوٹی اور دوسری بڑی۔ اُس گروہ/ جماعت کی چھوٹی قیمت کو زیریں/ نچلی جماعتی حد اور بڑی قیمت کو بالائی جماعتی حد کہتے ہیں۔ جیسا کہ مثال 2 میں 30 ,20 ,10 ,0 وغیرہ زیریں جماعتی حدود اور 39 ,29 ,19 ,9 وغیرہ بالائی جماعتی حدود ہیں۔

(b) حقیقی جماعتی حدود: (Class Boundaries)

مسلسل تعددی تقسیم

جیسا کہ مثال نمبر 2 سے چند حقیقی جماعتی حدیں نیچے دی گئی ہیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود
0 --- 9	−0.5 --- 9.5
10 --- 19	9.5 --- 19.5
20 --- 29	19.5 --- 29.5
30 --- 39	29.5 --- 39.5

لہٰذا مثال نمبر '2' میں ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ دس کی حقیقی زیریں جماعتی حد 9.5 ہے کیونکہ تمام قیمتیں جو 9.5 سے 10.49 کے درمیان ہیں انہیں 10 ہی سمجھا گیا ہے۔ جبکہ 19 کی بالائی جماعتی حد 19.5 ہے کیونکہ تمام وہ قیمتیں جو 18.5 سے 19.5 کے درمیان ہیں انہیں 19 ہی ریکارڈ کیا گیا ہے۔ کسی جماعت/ گروہ میں حقیقی زیریں جماعتی حد اور حقیقی بالائی جماعتی حد کو حقیقی جماعتی حدود کہا جاتا ہے۔ عام طور پر حقیقی جماعتی حدود بنانے کے لئے ہم دوسری جماعت کی زیریں حد اور پہلی جماعت کی بالائی حد کے فرق کو معلوم کر کے اُسے '2' پر تقسیم کرتے ہیں اس قیمت کو زیریں جماعتی حد میں سے تفریق کرنے سے حقیقی زیریں جماعتی حد بنتی ہے اور اگر اسی قیمت کو بالائی جماعتی حد میں جمع کر دیا جائے تو بالائی جماعتی حد، حقیقی بالائی جماعتی حد بن جاتی ہے۔ یہی حقیقی بالائی جماعتی حد اگلی کلاس کی حقیقی زیریں جماعتی حد بھی ہوتی ہے۔

(c) جماعتی نشان/ درمیانی نقطہ: (Class mark/Mid point)

کسی جماعت کے درمیانی نقطہ کو جماعتی نشان کہا جاتا ہے یہ ہر کلاس کی زیریں اور بالائی جماعتی حد کو جمع کر کے 2 پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(d) مجموعی تعدد: (Cumulative Frequency)

مجموعی تعدد کا کالم تعددی کالم سے مرتب کیا جاتا ہے۔ کسی گروپ/ کلاس کی بالائی حد سے کم تمام گروپس کے تعدد

(Frequency) کو مجموعی تعدد کہا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا اصطلاحات درج ذیل مثال نمبر 2 کی وضاحت کے لیے بیان کی گئی ہیں۔

مثال 3: مثال نمبر 2 کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی جماعتی حدود، درمیانی نقطہ / جماعتی نشان اور مجموعی تعدد نکالیں۔

حل:

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	درمیانی نقطہ / جماعتی نشان	تعدادات	مجموعی تعدادات
0 --- 9	−0.5 --- 9.5	4.5	2	2
10 --- 19	9.5 --- 19.5	14.5	10	2 + 10 = 12
20 --- 29	19.5 --- 29.5	24.5	5	12 + 5 = 17
30 --- 39	29.5 --- 39.5	34.5	9	17 + 9 = 26
40 --- 49	39.5 --- 49.5	44.5	6	26 + 6 = 32
50 --- 59	49.5 --- 59.5	54.5	7	32 + 7 = 39
60 --- 69	59.5 --- 69.5	64.5	1	39 + 1 = 40
کل تعداد			40	

6.1(ii) کالمی نقشہ کی تشکیل: (Construction of Histogram)

کالمی نقشہ:

کالمی نقشہ متصلہ مستطیلوں کا گراف ہے جس کو XY- محور پر تشکیل دیا جاتا ہے۔ یہ تعددی تقسیم کا گراف ہے۔ عملی طور پر غیر مسلسل اور مسلسل تعددی تقسیم کو کالمی نقشہ کی مدد سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ بہر حال ان کی تشکیل کے طریقہ کار کو مثالوں کی مدد سے واضح کرتے ہیں۔

مساوی وقفوں والا کالمی نقشہ:

مثال 1: 5 سکّوں کو اچھالا گیا جس میں تعددی تقسیم ہیڈز کی تعداد کو ظاہر کر رہی ہے۔ مندرجہ ذیل تعددی تقسیم سے کالمی نقشہ بنائیں۔

X (ہیڈز کتنی مرتبہ آیا)	تعدادات
0	1
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

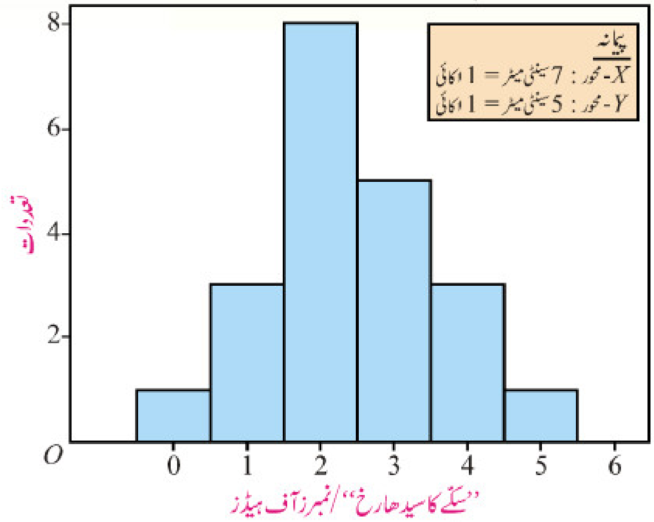
حل: کالمی نقشہ بنانے کے لئے ہم مندرجہ ذیل طریقہ کار اختیار کریں گے۔

(i) متغیر X کی قیمتوں کو دیکھتے ہوئے X- محور پر مناسب وقفے لے کر نشان لگائیں۔

(ii) مناسب پیمائش کو استعمال کرتے ہوئے Y- محور پر تعددات کے نشان لگائیں۔

(iii) ہر وقفے پر متغیر X کی قیمتوں کی متعلقہ تعدد سے مطابقت کرکے مستطیل کی اونچائی بنائیں۔

حاصل شدہ کالمی نقشہ درج ذیل ہے۔



مثال 2: مندرجہ ذیل مواد کی مدد سے کالمی نقشہ بنائیں۔

تعددات	حقیقی جماعتی حدود
2	−0.5 ---- 9.5
10	9.5 ---- 19.5
5	19.5 ---- 29.5
6	29.5 ---- 39.5
7	39.5 ---- 49.5
1	49.5 ---- 59.5

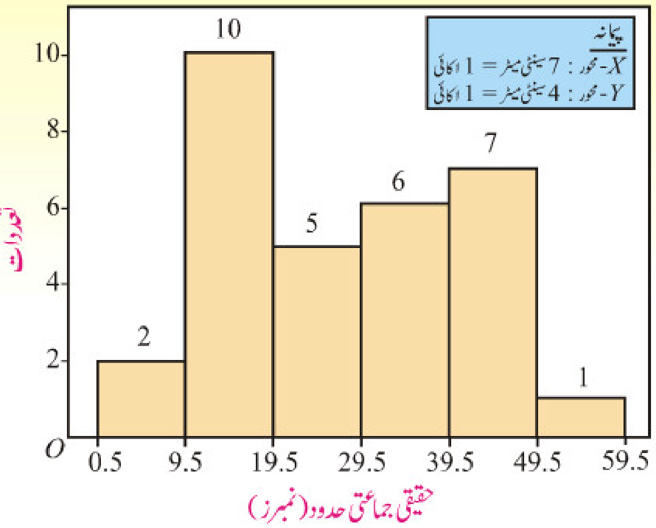
حل: چونکہ یہ ایک مسلسل تعددی تقسیم ہے لہٰذا ہم کالمی نقشہ مندرجہ ذیل طریقہ کار سے بنائیں گے۔

(i) X- محور پر مناسب پیمانہ لے کر حقیقی جماعتی حدود کا نشان لگائیں۔

(ii) Y- محور پر مناسب پیمانے کو استعمال کرتے ہوئے تعددات کا نشان لگائیں۔

(iii) ہر جماعتی وقفے پر اس گروپ کے متعلقہ تعدد تک مستطیل کی اونچائی بنائیں۔

کالمی نقشہ



نوٹ :

اوپر دیے گئے گراف میں 0.5– مثبت x-axis کی جانب صرف Histogram (کالمی گراف) کو بہتر سمجھنے کیلئے دیا گیا ہے۔

غیر مساوی وقفوں والا کالمی نقشہ:

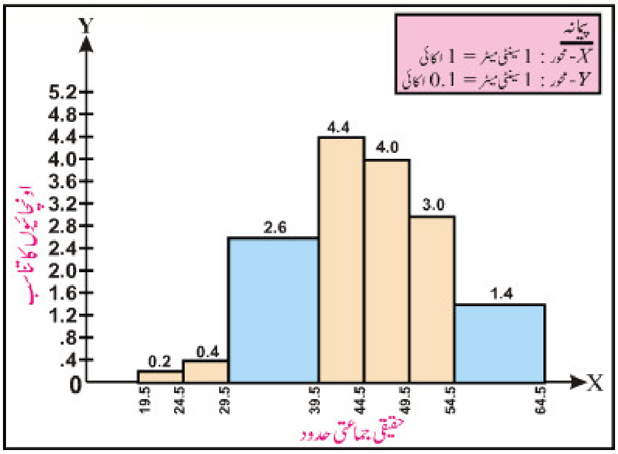
اگر جماعتی وقفے مساوی نہ ہوں تو ہر جماعتی تعدد کو اُس کے جماعتی وقفے کی جسامت پر تقسیم کرکے اونچائی (تعدد) کی تصیح کی جاتی ہے۔ اگر وقفہ دوگنا ہوجائے تو تعدد کو 2 پر تقسیم کیا جاتا ہے تاکہ گوشوارے (گراف) کا رقبہ اور دوسرے گوشواروں کے رقبوں کا صحیح تناسب ہوسکے۔ وغیرہ۔

مثال 3: مندرجہ ذیل مواد کا کالمی نقشہ بنائیں۔

عمریں	آدمیوں کی تعداد
20 --- 24	1
25 --- 29	2
30 --- 39	26
40 --- 44	22
45 --- 49	20
50 --- 54	15
55 --- 64	14

حل: جیسا کہ جماعتی وقفے غیر مساوی ہیں لہٰذا ہر مستطیل کی اونچائی کو تعدد کے مساوی نہیں کیا جاسکتا۔ اس لیے ہم ہر تعدد کو جماعتی وقفے کی جسامت پر تقسیم کرکے اونچائیوں میں صحیح تناسب حاصل کرتے ہیں۔ جیسا کہ مندرجہ ذیل جدول میں ظاہر کیا گیا ہے۔

عمریں	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی وقفہ (h)	تعدادات	اونچائیوں کا تناسب
20 —— 24	19.5 —— 24.5	5	1	1 ÷ 5 = 0.20
25 —— 29	24.5 —— 29.5	5	2	2 ÷ 5 = 0.4
30 —— 39	29.5 —— 39.5	10	26	26 ÷ 10 = 2.6
40 —— 44	39.5 —— 44.5	5	22	22 ÷ 5 = 4.4
45 —— 49	44.5 —— 49.5	5	20	20 ÷ 5 = 4.0
50 —— 54	49.5 —— 54.5	5	15	15 ÷ 5 = 3.0
55 —— 64	54.5 —— 64.5	10	14	14 ÷ 10 = 1.4



6.1(iii) تعددی کثیر الاضلاع کی تشکیل:(Construction of Frequency Polygon)

ایک تعددی کثیر الاضلاع کئی پہلوؤں (اطراف) سے بند دو العادی سطح (اقلیدس) ہے اس کی تشکیل کا طریقہ کار حسب ذیل ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل مواد سے تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	تعدادات
10—19	9.5—19.5	10
20—29	19.5—29.5	5
30—39	29.5—39.5	9
40—49	39.5—49.5	6
50—59	49.5—59.5	7
60—69	59.5—69.5	1

حل:

اقدامات:

(i) دو ہم جسامتی وقفوں کے اضافی گروہ لیں۔ ایک پہلے گروہ سے پہلے اور دوسرا آخری گروہ کے بعد لیں۔ اور ان

دونوں گروہوں کے درمیانی نقاط معلوم کریں ان گروہوں کے سامنے تعدداد صفر ہیں۔

جماعتی حدود	حقیقی جماعتی حدود	تعدداد
0 — 9	–0.5 — 9.5	0
10 — 19	9.5 — 19.5	10
20 — 29	19.5 — 29.5	5
30 — 39	29.5 — 39.5	9
40 — 49	39.5 — 49.5	6
50 — 59	49.5 — 59.5	7
60 — 69	59.5 — 69.5	1
70 — 79	69.5 — 79.5	0

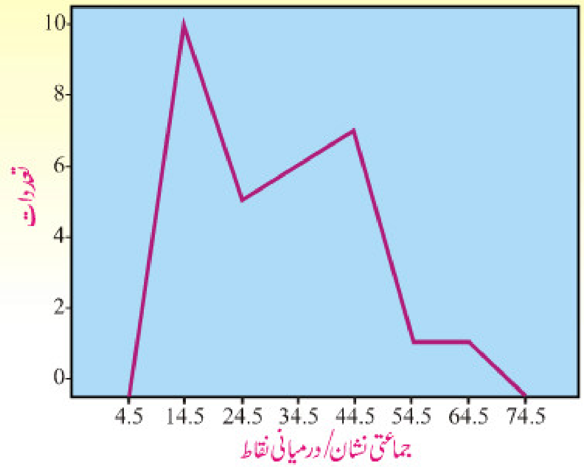
(ii) دی ہوئی تعددی تقسیم کے لیے جماعتی نشان یعنی درمیانی نقاط معلوم کریں۔

جماعتی نشان/درمیانی نقاط	تعدداد
4.5	0
14.5	10
24.5	5
34.5	9
44.5	6
54.5	7
64.5	1
74.5	0

(iii) X- محور پر درمیانی نقاط کی نشاندہی کریں اور مناسب پیمانہ مانتے ہوئے Y- محور پر تعدداد کو نوٹ کریں۔

(iv) ہر متعلقہ جماعتی نشان/درمیانی نقطہ کو تعدداد کے مدمقابل کسی نقطے سے خاکہ بنائیں۔

(v) ان تمام نقاط کو چھوٹی چھوٹی لائنوں سے آپس میں ملادیں۔



6.2 مجموعی تعددی تقسیم : (Cumulative Frequency Distribution)

6.2(i) مجموعی تعددی جدول کی تشکیل

ایک جدول جو بالائی جماعتی حدود کے مد مقابل مجموعی تعددات کو ظاہر کرے، مجموعی تعددی تقسیم کہلاتی ہے۔ یہ کم تر مجموعی تعددی تقسیم بھی کہلاتی ہے۔

مثال 1 : مندرجہ ذیل مواد کے لیے مجموعی تعددی تقسیم بنائیں۔

جماعت/ گروہ	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44	45 – 49	50 – 54
تعددات	1	2	26	22	20	15	14

حل : مجموعی تعددی تقسیم کی تشکیل درج ذیل ہے۔

حقیقی جماعتی حدود	تعددات (f)	مجموعی تعددات	حقیقی جماعتی حدود	مجموعی تعددات
10.5 — 19.5	0	0	19.5 سے کم	0
19.5 — 24.5	1	0 + 1 = 1	24.5 سے کم	1
24.5 — 29.5	2	1 + 2 = 3	29.5 سے کم	3
29.5 — 34.5	26	3 + 26 = 29	34.5 سے کم	29
34.5 — 39.5	22	29 + 22 = 51	39.5 سے کم	51
39.5 — 44.5	20	51 + 20 = 71	44.5 سے کم	71
44.5 — 49.5	15	71 + 15 = 86	49.5 سے کم	86
49.5 — 54.5	14	86 + 14 = 100	54.5 سے کم	100

6.2(ii) مجموعی تعددی کثیر الاضلاع/ترسیم کی خاکہ کشی
(Cumulative Frequency Polygon/Ogive):

مجموعی تعددی کثیر الاضلاع/ترسیم کی خاکہ کشی۔

اس میں مندرجہ ذیل اقدامات شامل ہیں۔

(i) حقیقی جماعتی حدود کی X- محور پر اور مجموعی تعدد کی Y- محور پر نشاندہی کریں۔

(ii) متعلقہ بالائی جماعتی حدود اور تعددات کو بذریعہ نشان درج کریں یا نوٹ کریں۔

(iii) ان تمام نقاط کو چھوٹی چھوٹی لائنوں سے ملایئے۔

(iv) آخری نقطہ سے ایک عمود X- محور پر گرا کر اُس تصویر کو بند کر دیں۔

مثال 2: دیے ہوئے مواد سے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع بنایئے۔

تعددات	جماعتی حدود
2	4 — 6
4	7 — 9
8	10 — 12
3	13 — 15

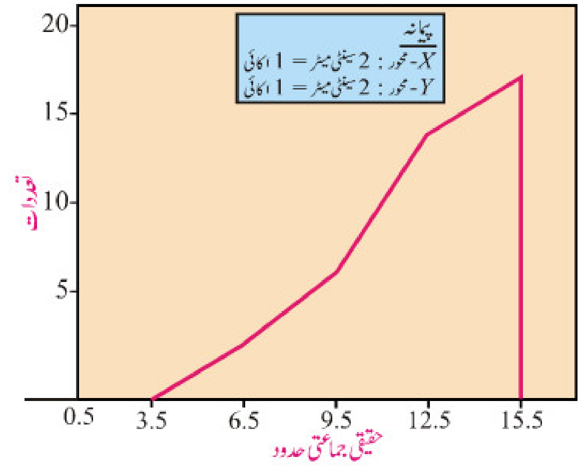
حل: سب سے پہلے ہم شروع میں ایک گروہ کا اضافہ کریں گے پھر ہم حقیقی جماعتی حدود بنائیں گے اور مجموعی تعددات کو بھی معلوم کریں گے۔

مجموعی تعددات	تعددات	حقیقی جماعتی حدود	جماعتی حدود
0	**0**	**0.5 — 3.5**	**1 — 3**
0 + 2 = 2	2	3.5 — 6.5	4—6
2 + 4 = 6	4	6.5 — 9.5	7—9
6 + 8 = 14	8	9.5 — 12.5	10—12
14 + 3 = 17	3	12.5 — 15.5	13—15

اب ہم مندرجہ بالا تعددی تقسیم کو کم تر مجموعی تعددی تقسیم کی صورت میں مندرجہ ذیل طریقہ کار سے لکھیں گے۔

مجموعی تعددات	حقیقی جماعتی حدود
0	3.5 سے کم
2	6.5 سے کم
6	9.5 سے کم
14	12.5 سے کم
17	15.5 سے کم

مجموعی تعددی کثیر الاضلاع درج ذیل ہے۔



مشق 6.1

-1 مندرجہ ذیل مواد مختلف خاندانوں میں افراد کی تعداد کو ظاہر کر رہا ہے۔ اس مواد کی مدد سے تعددی تقسیم تشکیل کریں اور مجموعی تعددات کو بھی معلوم کریں۔

9, 11, 4, 5, 6, 8, 4, 3, 7, 8, 5, 5, 8, 3, 4, 9, 12, 8, 9, 10, 6, 7, 7, 11, 4, 4, 8, 4, 3, 2, 7, 9, 10, 9, 7, 6, 9, 5, 7.

-2 مندرجہ ذیل مواد پنجم جماعت کے 40 طالبعلموں کا وزن کر کے حاصل کیا گیا ہے۔ جماعی وقفے کی جسامت '5' لے کر تعددی تقسیم تشکیل کریں۔ حقیقی جماعتی حدود اور درمیانی نقاط بھی معلوم کریں۔

34, 26, 33, 32, 24, 21, 37, 40, 41, 28, 28, 31, 33, 34, 37, 23, 27, 31, 31, 36, 29, 35, 36, 37, 38, 22, 27, 28, 29, 31, 35, 35, 40, 21, 32, 33, 27, 29, 30, 23.

اور مجموعی تعددی تقسیم بھی بنائیں۔

اشارہ: (جماعت اس طرح بنائیں ...... ,29—25 ,24—20)

3- مندرجہ ذیل مواد ایک سکول کے تیس (30) اساتذہ کی تنخواہوں کو ظاہر کر رہا ہے۔ 100 روپے کا جماعتی وقفہ (جسامت) لے کر تعددی تقسیم بنائیں۔

450, 500, 550, 580, 670, 1200,1150, 1120, 950, 1130, 1230, 890, 780, 760, 670, 880, 890, 1050, 980, 970, 1020, 1130, 1220, 760, 690, 710, 750, 1120, 760, 1240.

اشارہ: (جماعت اس طرح بنائیں ...... ,649—550 ,549—450)

4- مندرجہ ذیل مواد کسی شہر کی (30) مقامی/مضافاتی جگہوں پر روزانہ بجلی کی لوڈشیڈنگ (تعطلی) کے دورانیے کے گھنٹوں کو ظاہر کرتا ہے۔ لوڈشیڈنگ دورانیہ پر 2 گھنٹوں کا جماعتی وقفہ لے کر تعددی تقسیم بنائیں۔

6, 12, 5, 7, 8, 3, 6, 7, 10,2, 14, 11, 12, 8, 6, 8, 9, 7, 11, 6, 9, 12, 13, 10, 14, 7, 6, 10, 11, 14, 12.

اور مندرجہ ذیل سوالات کے جوابات دیں۔

(i) زیادہ سے زیادہ لوڈشیڈنگ کے گھنٹے بتائیں۔

(ii) کم سے کم لوڈشیڈنگ کے وقفے بتائیں۔

اشارہ: (کلاس کا کالم اس طرح بنائیں .... ,7—6 ,5—4 ,3—2)

5- مندرجہ ذیل مواد جو کہ طالبعلموں کے اوزان (کلو گرام) ہیں اس مواد کے ذریعے کالمی نقشہ اور تعددی کثیر الاضلاع بنائیں۔

تعددات (طالبعلموں کی تعداد)	وزن/اوزان
5	20—24
8	25—29
13	30—34
22	35—39
15	40—44
10	45—49
8	50—54

6.3 مرکزی رجحان کے پیمانے (Measures of Central Tendency)

تعارف:

ہم پڑھ چکے ہیں کہ مواد کو ایک جامع شکل میں تعددی تقسیم اور گرافی اظہار کے ساتھ پیش کیا گیا تو معلومات کو با آسانی سمجھ لیا گیا۔ مواد میں دی گئی معلومات کو ہم مزید مختصر طریقہ سے صرف ایک نمائندہ قدر کے ذریعے پیش کر سکتے ہیں۔ یہ مواد کے ارد گرد تقریباً مرکزی قیمت ہوتی ہے۔ یہ نمائندہ قدر متغیر کی تقسیم کے رجحان کو ظاہر کرتی ہے۔ اس قیمت کو اوسط یا مرکزی قیمت کہتے ہیں۔ مرکزی قیمت نکالنے کے لیے استعمال ہونے والے پیمانوں کو مرکزی رجحان کے پیمانے کہا جاتا ہے۔ عام طور پر مندرجہ ذیل مرکزی رجحان کے پیمانے استعمال کیے جاتے ہیں۔

1- حسابی اوسط	2- وسطانیہ
3- عادہ	4- اقلیدسی اوسط
5- ہم آہنگ اوسط	6- چہارمی مقدار

ان پیمانوں کو مختلف صورتوں میں مواد کی نوعیت کے مطابق استعمال کیا جاتا ہے۔

6.3(i) (a) حسابی اوسط (Arithmetic Mean)

حسابی اوسط وہ قیمت ہے جو تمام مدات کے مجموعہ کو مدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ پس حسابی اوسط کو $\overline{X}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے یوں معلوم کیا جاتا ہے۔

n مدات کا حسابی اوسط $= (\overline{X}) = \dfrac{\sum X}{n}$

$$\overline{X} = \frac{\text{تمام مدات کا مجموعہ}}{\text{تمام مدات کی تعداد}}$$

حسابی اوسط نکالنے کا طریقہ:

مواد کی دو اقسام ہیں۔ گروہی مواد اور غیر گروہی مواد۔ مواد کی ان دو اقسام کے لیے حسابی اوسط معلوم کرنے کے مختلف طریقے ہیں جن کی وضاحت مندرجہ ذیل اقسام سے کی جارہی ہے۔

غیر گروہی مواد:

غیر گروہی مواد سے حسابی اوسط نکالنے کے تین طریقے ہیں۔ اور وہ تین طریقے مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) **براہِ راست طریقہ (تعریف کے مطابق) :**

براہ راست طریقے میں ہم مندرجہ ذیل کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{حسابی اوسط} = \bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{\text{تمام مدات کا مجموعہ}}{\text{تمام مدات کی تعداد}}$$

مثال 1: سات طالبعلموں نے ریاضی میں جو نمبرز لیے وہ مندرجہ ذیل ہیں۔ اس مواد کی مدد سے حسابی اوسط معلوم کریں اور جواب کی وضاحت/ تشریح بھی کریں۔

طالبعلموں کی تعداد	1	2	3	4	5	6	7
حاصل کردہ نمبرز	45	60	74	58	65	63	49

حل: فرض کیا طالبعلم کے نمبرز = X

$$\bar{X} = \frac{\text{تمام مدات کا مجموعہ}}{\text{تمام مدات کی تعداد}} = \frac{\sum X}{n}$$

$$\text{حسابی اوسط } (\bar{X}) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_7}{7}$$

$$\text{حسابی اوسط} = \frac{45 + 60 + 74 + 58 + 65 + 63 + 49}{7} =$$

$$= \frac{414}{7} = 59.14 \text{ نمبرز}$$

وضاحت: چونکہ مواد کی اکائی نمبرز ہیں اس لیے جواب بھی نمبرز میں ہی ہو گا۔ لہٰذا ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ سات طالبعلموں میں سے ہر ایک طالبعلم نے اوسطاً 59 نمبرز لیے ہیں۔

(ii) بالواسطہ، مختصر یا کوڈنگ طریقہ:

بالواسطہ طریقے کے تحت حسابی اوسط کو نکالنے کے دو اصول ہیں۔ یہ اصول اس وقت استعمال کئے جاتے ہیں جب مواد یا تو بہت بڑی قیمتوں پر مشتمل ہو یا مدات کی تعداد بہت زیادہ ہو۔ اِن اصولوں کے تحت حسابی اوسط کو نکالنا نہایت آسان ہے۔ یہ اصول نظریاتی ہیں اور عملاً استعمال نہیں کئے جاتے کیونکہ بہت بڑے مواد سے حسابی اوسط نکالنے کے لئے شماریاتی سافٹ ویئر موجود ہیں۔ تاہم طالبعلموں کو ان اصولوں سے واقف ہونا ضروری ہے۔ وہ اصول مندرجہ ذیل ہیں۔

(i) فرضی یا عارضی حسابی اوسط استعمال کرنا

(ii) فرضی یا عارضی حسابی اوسط استعمال کرنا اور متغیر کی پیمائش/ سکیل کو تبدیل کرنا۔

متغیر کی پیمائش/ سکیل کو تبدیل کر کے فرضی یا عارضی حسابی اوسط استعمال کرنا کسی متغیر کی قیمت اور مستقل مقدار 'A' کے فرق کو انحراف کہا جاتا ہے۔ مثلاً

$$X \text{ کے حسابی اوسط سے انحراف} = \left(x_i - \bar{X}\right) = (X_i - \bar{X}) \quad , \; i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

$$\text{مستقل مقدار } A \text{ سے انحراف} = \left(x_i - A\right) = (X_i - A) \quad , \; i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

مندرجہ ذیل فارمولے بالواسطہ طریقے کے تحت استعمال ہوتے ہیں۔

(i) $\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$ (ii) $\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n} \times h$

یہاں پر

$D_i = (x_i - A)$، اور A کوئی فرضی قیمت ہے جو کہ فرضی یا عارضی اوسط کہلاتی ہے۔

اور $u_i = \frac{(x_i - A)}{h}$ جبکہ 'h' X کی غیر برابر قیمتوں کے حاصل ضرب والی مستقل مقدار ہے۔

مثال 2: پانچ (5) اساتذہ کی تنخواہیں درج ذیل ہیں۔ براہ راست طریقہ اور بالواسطہ طریقے کو استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط معلوم کریں اور ان کے جوابات کا موازنہ بھی کریں۔ 11500, 12400, 15000, 14500, 14800.

حل: براہِ راست طریقہ : (Direct Method)

(حسابی اوسط) $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$

$= \frac{11500 + 12400 + 15000 + 14500 + 14800}{5}$

$= \frac{68200}{5} = 13640$ روپے

بالواسطہ طریقہ: (Indirect Method)

فرض کیا

$A = 13,000$

$D_i = (x_i - 13,000)$

$h = 100$

$u_i = \frac{x_i - A}{100}$

درج ذیل جدول حسابی اوسط نکالنے کے لیے درکار ہے۔

X	$D_i = (x_i - 13000)$	$u_i = \frac{(x_i - A)}{100}$
11500	−1500	−15
12400	−600	−6
15000	2000	20
14500	1500	15
14800	1800	18
$\Sigma x_i = 68200$	$\Sigma D_i = 3200$	$\Sigma u_i = 32$

(i) مختصر طریقہ : (Short Method)

$$\bar{X} = 13000 + \frac{3200}{5} = 13000 + 640 = 13640 \text{ روپے}$$

(ii) کوڈنگ طریقہ : (Coding Method)

$$\bar{X} = A + \frac{\Sigma u_i}{n} \times h$$

$$\bar{X} = 13000 + \frac{32}{5} \times 100 = 13640 \text{ روپے}$$

گروہی مواد:

تعددی تقسیم کی شکل میں مواد کو گروہی مواد کہا جاتا ہے۔ گروہی مواد کے لیے براہِ راست اور بالواسطہ طریقوں کے فارمولے مندرجہ ذیل ہیں۔

(a) براہِ راست طریقہ:

$$\bar{X} = \frac{\sum f x_i}{\sum f} = \frac{\sum fX}{\sum f}$$

(b) بالواسطہ طریقہ:

(i) $\bar{X} = A + \frac{\sum fD}{\sum f}$ (ii) $\bar{X} = A + \frac{\sum fu}{\sum f} \times h$

جبکہ '$X = x_i$' کسی کلاس یا گروہ کے درمیانی نقطے کو ظاہر کر رہا ہے اگر جماعتی وقفہ دیا ہوا ہو۔ اور 'h' جماعتی وقفے کی جسامت کو ظاہر کر رہا ہے۔

مثال 3: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کے لیے براہِ راست طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط معلوم کریں۔

X ('Heads' کی تعداد)	تعددات
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

حل: ہم حسابی اوسط مندرجہ ذیل طریقہ سے معلوم کریں گے۔

X	f	fX
1	3	3
2	8	16
3	5	15
4	3	12
5	1	5
کل تعداد	$\Sigma f = 20$	$\Sigma fX = 49$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{49}{20} = 2.45 \quad \text{یا} \quad 3 \text{ Heads}$$

(چونکہ Head غیر مسلسل متغیر ہے)

مثال 4: مندرجہ ذیل مواد ٹافی کے ڈبوں کے وزن (گرام) کو ظاہر کر رہا ہے۔ ان ڈبوں کے وزن کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

جماعت / گروہ اوزان (گراموں میں)	تعدادات
0 —— 9	2
10 —— 19	10
20 —— 29	5
30 —— 39	9
40 —— 49	6
50 —— 59	7
60 —— 69	1
کل تعداد	$\Sigma f = 40$

حل : سب سے پہلے ہم ہر گروہ کا درمیانی نقطہ معلوم کریں گے اور پھر حسابی اوسط معلوم کریں گے۔

جماعت/گروہ اوزان (گراموں میں)	تعدادات f	درمیانی نقاط (X)	fX
0 --- 9	2	4.5	9
10 --- 19	10	14.5	145
20 --- 29	5	24.5	122.5
30 --- 39	9	34.5	310.5
40 --- 49	6	44.5	267
50 --- 59	7	54.5	381.5
60 --- 69	1	64.5	64.5
کل تعداد	$\sum f = 40$		$\sum fX = 1300$

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{1300}{40} = 32.5 \text{ گرام}$$ (حسابی اوسط)

مثال 5 : مثال نمبر 4 کے مواد کو استعمال کرتے ہوئے عارضی حسابی اوسط کی قیمت $X = 34.5$ لے کر مختصر فارمولا سے حسابی اوسط معلوم کریں۔

حل : ہم مندرجہ ذیل فارمولے استعمال کریں گے۔

(i) $\bar{X} = A + \frac{\sum fD}{\sum f}$ (ii) $\bar{X} = A + \frac{\sum fu}{\sum f} \times h$

جیسا کہ ہمیں بتایا گیا ہے $A = 34.5$ اور ہم نے دیکھا کہ تعددی تقسیم میں ہر جماعتی وقفے کی جسامت '10' ہے لہٰذا ہم $h = 10$ لیتے ہیں اور ہم مندرجہ ذیل طریقے سے جدول بناتے ہیں۔

جماعت/گروہ	تعدادات f	X	$D = X - 34.5$	$u = (X-A)/10$	fD	fu
0 --- 9	2	4.5	−30	−3	−60	−6
10 --- 19	10	14.5	−20	−2	−200	−20
20 --- 29	5	24.5	−10	−1	−50	−5
30 --- 39	9	34.5	0	0	0	0
40 --- 49	6	44.5	10	1	60	6
50 --- 59	7	54.5	20	2	140	14
60 --- 69	1	64.5	30	3	30	3
کل تعداد	40				$\Sigma fD = -80$	$\Sigma fu = -8$

اوپر والے فارمولوں میں قیمتیں درج کرنے سے

(i) $\bar{X} = 34.5 + \frac{-80}{40} = 34.5 - 2 = 32.5$ گرام

(ii) $\bar{X} = 34.5 + \frac{-8}{40} \times 10 = 34.5 - 2 = 32.5$ گرام

لہٰذا تینوں طریقوں سے جواب ایک جیسا ہے۔

6.3(i) (b) وسطانیہ : (Median)

جب مواد کسی ترتیب یعنی بڑھتی یا گھٹتی ہوئی صورت میں ہو تو وسطانیہ وہ قدر ہے جو اس پورے مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کر دے (یعنی مواد کا پچاس فیصد حصہ وسطانی قدر سے پہلے اور پچاس فیصد وسطانی قدر کے بعد ہوتا ہے)۔ وسطانیہ کو '$\tilde{X}$' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم وسطانیہ نکالنے کے لیے مندرجہ ذیل فارمولے استعمال کرتے ہیں۔

غیر گروہی مواد کے لیے:

(i) ترتیب دیے ہوئے مواد میں جب مدات کی تعداد طاق ہو تو وسطانیہ مندرجہ ذیل فارمولے سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\tilde{X} = \left(\frac{n}{2} + 1\right) \text{ویں قدر}$$

(ii) ترتیب دیے ہوئے مواد میں جب مدات کی تعداد جفت ہو تو وسطانیہ درمیانی مدات کا حسابی اوسط ہوتا ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ وسطانیہ $\frac{n}{2}$ ویں اور $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ ویں قدر کا حسابی اوسط ہے۔

$$\tilde{X} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\text{ویں قدر} + \frac{n}{2} + 1 \text{ ویں قدر}\right]$$

مثال 1: ریاضی کے پانچ ٹرموں کے ٹیسٹ میں ایک طالبعلم نے مندرجہ ذیل نمبرز لیے۔
82, 93, 86, 92 اور 79 نمبروں کے لیے وسطانیہ معلوم کریں۔

حل: گریڈز کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے

79, 82, 86, 92, 93

چونکہ مدات کی تعداد طاق ہے $n = 5$

لہٰذا

$$\tilde{X} = \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ویں قدر}$$

$$\tilde{X} = \left(\frac{5+1}{2}\right) \text{ویں قدر}$$

$\tilde{X} =$ تیسری قدر

$\tilde{X} = 86$

مثال 2: مختلف برینڈ کے چھ جوس کے پیک میں چینی کی مقدار ملی گراموں میں درج ذیل پائی گئی۔

1.9 اور 3.1, 2.9, 2.5, 2.7, 2.3 وسطانیہ معلوم کریں۔

حل: مواد کو ترتیب صعودی میں لکھنے سے

1.9, 2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 3.1

چونکہ مدات کی تعداد جفت ہے یعنی $n = 6$

$\tilde{X} = \frac{1}{2}\left[\frac{6}{2} \text{ ویں قدر} + \frac{6}{2}+1 \text{ ویں قدر}\right]$

$\tilde{X} = \frac{1}{2}\left[\text{تیسری قدر} + \text{چوتھی قدر}\right]$

$\tilde{X} = \frac{2.5 + 2.7}{2} = 2.6$ ملی گرام

گروہی مواد (غیر مسلسل):

غیر مسلسل گروہی مواد کے لیے وسطانیہ مندرجہ ذیل طریقے سے نکالا جاتا ہے۔

- مجموعی تعددی تقسیم کا کالم بنائیں۔
- مجموعی تعددی تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے وسطانی قدر معلوم کریں یعنی ایسی کلاس/ گروہ جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں قدر رکھتا ہو۔

مثال 3: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کے لیے وسطانیہ معلوم کریں۔

X	تعددات
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

حل: ہم مجموعی تعددی تقسیم کا کالم مندرجہ ذیل طریقے سے بنائیں گے۔

X	تعددات	مجموعی تعددات
1	3	3
2	8	11
3	5	16
4	3	19
5	1	20
کل تعداد	$\Sigma f = 20$	

اب

ایسا گروہ جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں قدر رکھتا ہو = وسطانیہ

ایسا گروہ جو $\left(\frac{20}{2}\right)$ ویں قدر رکھتا ہو = وسطانیہ

ایسا گروہ/جماعت جو 10 ویں قدر رکھتا ہو = وسطانیہ

2 = وسطانیہ

گروہی مواد (مسلسل):

مسلسل گروہی مواد کے لئے وسطانیہ درج ذیل طریقے سے نکالا جاتا ہے۔

- حقیقی جماعتی حدود نکالی جائیں۔
- مجموعی تعددی تقسیم کا کالم تشکیل دیں۔
- مجموعی تعددی تقسیم سے وسطانی جماعت معلوم کریں یعنی وہ جماعت جو $\left(\frac{n}{2}\right)$ ویں قدر رکھتی ہو۔
- اس کے لیے مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کریں۔

$$\text{وسطانیہ} = l + \frac{h}{f}\left\{\frac{n}{2} - c\right\}$$

جہاں

l : وسطانی جماعت کی زیریں جماعتی حدود

h : وسطانی جماعت کے جماعتی وقفے کی جسامت

f : وسطانی جماعت کی تعدد

c : وسطانی جماعت سے پچھلی جماعت کا مجموعی تعدد

مثال 4: چالیس (40) طالبعلموں نے ایک سوال کو حل کرنے میں جتنا وقت صَرف کیا مندرجہ ذیل مواد اُس وقت کو ظاہر کر رہا ہے۔ اس مواد کی مدد سے وسطانیہ معلوم کریں۔

138	164	150	132	144	125	149	157
146	158	140	147	136	148	152	144
168	126	138	176	163	119	154	165
146	173	142	147	135	153	140	135
161	145	135	142	150	156	145	128

حل:

(*a*)

جماعتی وقفے	تعدادات	حقیقی جماعتی حدود	مجموعی تعدادات	
118 — 126	3	117.5 – 126.5	3	
127 — 135	5	126.5 – 135.5	8	
136 — 144	9	135.5 – 144.5	17	
145 — 153	12	144.5 – 153.5	29	وسطانی جماعت
154 — 162	5	153.5 – 162.5	34	
163 — 171	4	162.5 – 171.5	38	
172 — 180	2	171.5 – 180.5	40	
کل تعداد	$\Sigma f = 40$	—	—	

لہٰذا

$$\text{وسطانیہ } (\tilde{X}) = l + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right)$$

جہاں $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$ ۔ چونکہ وسطانیہ وہ قدر ہوتی ہے جو مواد کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتی ہے یعنی مواد کا (50) پچاس فیصد حصہ وسطانیہ قدر سے پہلے اور پچاس فیصد حصہ وسطانی قدر کے بعد ہوتا ہے۔ چونکہ پہلی تین تعدادات کا اور پہلی چار تعدادات کا مجموعہ بالترتیب $3 + 5 + 9 = 17$ اور $3 + 5 + 9 + 12 = 29$ ہے یہ بات صاف ظاہر ہے کہ وسطانی جماعت چوتھی جماعت میں لہٰذا

$l =$ وسطانی جماعت کی زیریں جماعتی حد $= 144.5$

$c =$ وسطانی جماعت سے پچھلی مجموعی تعدد $= 17$

$f =$ وسطانی جماعت کا تعدد $= 12$

$h =$ وسطانی جماعت کے جماعتی وقفے کی جسامت $= 9$

وسطانیہ $(\tilde{x}) = l + \frac{h}{f}\left(\frac{n}{2} - c\right) = 144.5 + \frac{9}{12}(20 - 17)$

وسطانیہ $= 146.8$

6.3(i) (c) عادہ (Mode)

کسی سلسلہ یا مواد میں وہ قیمت جو سب سے زیادہ بار آئے عادہ کہلاتی ہے۔ عادہ کو نکالنے کے لیے مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کیا جاتا ہے۔

(الف) غیر گروہی مواد اور غیر مسلسل گروہی مواد
(Ungrouped Data and Discrete Grouped Data)

مواد میں زیادہ بار آنے والی مد = عادہ

(ب) گروہی مواد (مسلسل) Grouped Data (Continuous)

گروہی مواد کے تحت عادہ کو نکالنے کے لیے مندرجہ ذیل اقدامات کیے جاتے ہیں۔

ایسا گروہ معلوم کریں جس کے سامنے سے بڑا تعدد ہو۔

مندرجہ ذیل فارمولا استعمال کریں۔

$$\text{عادہ} = l + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h$$

جہاں

l : عادہ گروہ/جماعت کی حقیقی زیریں حد

h : عادہ گروہ میں جماعتی وقفہ کی جسامت

f_m : سب سے زیادہ تعدد رکھنے والے گروہ کا تعدد یعنی عادہ گروہ کا تعدد

f_1 : عادہ گروہ سے پہلے والے گروہ کا تعدد

f_2 : عادہ گروہ کے بعد والے گروہ کا تعدد

مثال 1: مندرجہ ذیل مواد جوتوں کی جسامت کو ظاہر کر رہا ہے اس مواد کی مدد سے عادہ معلوم کریں۔

4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 5, 7.5, 8, 8, 8, 6, 5, 6, 5, 7

حل: ہم نے مواد میں سب سے زیادہ بار آنے والی قیمت کو دیکھا اور معلوم کیا کہ

عادہ $= 6$

مثال 2: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کے لیے عادہ معلوم کریں۔

X (ہیڈز کی تعداد)	تعددات
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

حل: چونکہ دیا ہوا مواد غیر مسلسل گروہی مواد ہے لہٰذا

$2 =$ عادہ

(چونکہ $X = 2$ کے لئے تعدد سب سے بڑا ہے یعنی "2 ہیڈز" سب سے زیادہ تعداد دفعہ 8 مرتبہ آیا ہے۔)

مثال 3: مندرجہ ذیل مواد ٹافی کے ڈبوں کا اوزان (گراموں میں) ظاہر کر رہا ہے۔ عادہ معلوم کریں۔

جماعت/گروہ	تعددات
0 —— 9	2
10 —— 19	10
20 —— 29	5
30 —— 39	9
40 —— 49	6
50 —— 59	7
60 —— 69	1

حل: چونکہ یہ مسلسل گروہی مواد ہے لہٰذا ہم اس کا عادہ درج ذیل طریقہ سے نکالیں گے۔

(الف) سب سے پہلے حقیقی جماعتی حدود معلوم کریں۔

(ب) سب سے بڑا تعدد رکھنے والا گروہ معلوم کریں۔

گروہ/جماعت	حقیقی جماعتی حدود	تعدادات (f)
0 ---- 9	−0.5 ---- 9.5	2
10 ---- 19	9.5 ---- 19.5	10 → عادہ گروہ
20 ---- 29	19.5 ---- 29.5	5
30 ---- 39	29.5 ---- 39.5	9
40 ---- 49	39.5 ---- 49.5	6
50 ---- 59	49.5 ---- 59.5	7
60 ---- 69	59.5 ---- 69.5	1
کل تعداد		$\Sigma f = 40$

مندرجہ بالا جدول سے ہم نے دیکھا

عادہ گروہ $= 9.5 - 19.5$

$f_m = 10\ ,\ l = 9.5\ ,\ h = 10$

$f_1 = 2$ اور $f_2 = 5$

عادہ $= l + \dfrac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h$

عادہ $= 9.5 + \dfrac{10-2}{2(10)-2-5} \times 10$

عادہ $= 9.5 + \dfrac{80}{13} = 9.5 + 6.134$

$=$ 15.654 گرام

(d) 6.3(i) اقلیدسی اوسط (Geometric Mean)

کسی متغیر X کی اقلیدسی اوسط سے مراد n-مدات $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ کے حاصل ضرب کا n^{th} مثبت رُوٹ (Root) ہے۔ علامتی طور پر ہم اسے یوں لکھیں گے۔

اقلیدسی اوسط (G.M.) $= (x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_n)^{1/n}$

مندرجہ بالا فارمولا لوگارتھم کو استعمال کرتے ہوئے یوں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے

$$\text{G.M.} = Anti\ \log\left(\frac{\sum \log X}{n}\right)$$

گروہی مواد کے لیے

$$\text{G.M.} = Anti\ \log\left(\frac{\sum f \log X}{\sum f}\right)$$

مثال 1: مدات 8 ,4 ,2 کے لئے اقلیدسی اوسط معلوم کریں۔ بذریعہ

(الف) بنیادی فارمولا کی مدد سے

(ب) لوگارتھم فارمولا کی مدد سے

حل: (الف) بنیادی فارمولا کو استعمال کرتے ہوئے

اقلیدسی اوسط $(G.M) = (2 \times 4 \times 8)^{1/3} = (64)^{1/3} = 4$

(ب) لوگارتھم فارمولا کو استعمال کرتے ہوئے

X	$\log X$
2	0.3010
4	0.6021
8	0.9031
کل تعداد	$\Sigma \log X = 1.8062$

اقلیدسی اوسط $(G.M) = \text{Anti-log}\left(\frac{1.8062}{3}\right)$

$= \text{Anti-log}\ (0.6021) = 4.00003 = 4$

مثال 2: مندرجہ ذیل مواد کی مدد سے اقلیدسی اوسط معلوم کریں۔

نمبر (فیصد)	تعددات (طالبعلموں کی تعداد)
33 ---- 40	28
41 ---- 50	31
51 ---- 60	12
61 ---- 70	9
71 ---- 75	5

حل:

گروہ	تعددات (f)	X	$\log X$	$f \log X$
33 ---- 40	28	36.5	1.562293	43.7442
41 ---- 50	31	45.5	1.658011	51.39835
51 ---- 60	12	55.5	1.744293	20.93152
61 ---- 70	9	65.5	1.816241	16.34617
71 ---- 75	5	73	1.863323	9.316614
کل تعداد	$\Sigma f = 85$			$\Sigma f \log X = 141.7369$

$$\text{اقلیدسی اوسط (G.M)} = \text{Anti-log}\left(\frac{\Sigma f \log X}{\Sigma f}\right)$$

$$\text{G.M} = \text{Anti-log}\left(\frac{141.7369}{85}\right)$$

$$= \text{Anti-log}\ (1.66749) = 46.50 \text{ فیصد نمبر}$$

6.3(i) (e) ہم آہنگ اوسط (Harmonic Mean)

ہم آہنگ اوسط وہ قیمت ہے جو n-مقدارات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کے معکوس یعنی $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ کا معکوس وسط ہے۔

علامتی طور پر اسے مندرجہ ذیل طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

غیر گروہی مواد کے لیے فارمولا

$$\text{ہم آہنگ اوسط (H.M)} = \frac{n}{\sum \frac{1}{X}}$$

گروہی مواد کے لیے فارمولا

$$\text{ہم آہنگ اوسط (H.M)} = \frac{n}{\sum \frac{f}{X}}$$

مثال 1: مندرجہ ذیل مواد کے لیے ہم آہنگ اوسط معلوم کریں۔

X	12	5	8	4

حل:

X	$1/X$
12	0.0833
5	0.2
8	0.125
4	0.25
کل تعداد	0.6583

$$\text{H.M} = \frac{n}{\sum \frac{1}{X}} = \frac{4}{0.6583} = 6.076$$

مثال 2: مندرجہ ذیل مواد کو استعمال کرتے ہوئے ہم آہنگ اوسط معلوم کریں۔

گروہ/جماعت	طالبعلموں کی تعداد
33 ---- 40	28
41 ---- 50	31
51 ---- 60	12
61 ---- 70	9
71 ---- 75	5

حل:

جماعت	تعدادات (f)	X	f / X
33 ---- 40	28	36.5	0.767123
41 ---- 50	31	45.5	0.681319
51 ---- 60	12	55.5	0.216216
61 ---- 70	9	65.5	0.137405
71 ---- 75	5	73	0.068493
کل تعداد	$\Sigma f = 85$		$\frac{\Sigma f}{X} = 1.870556$

$$\text{H.M} = \frac{\Sigma f}{\Sigma \frac{f}{X}} = \frac{85}{1.870556} = 45.441$$ (ہم آہنگ اوسط)

حسابی اوسط کی خصوصیات : (Properties of Arithmetic Mean)

(الف) ایک جیسی مدات مثلاً مستقل مقدار 'k' کا حامل متغیر کا حسابی اوسط بھی وہی مستقل مقدار 'k' ہی ہوتا ہے۔

(ب) مرکز کی تبدیلی حسابی اوسط پر اثر انداز ہوتی ہے۔

(ج) سکیل کی تبدیلی بھی حسابی اوسط پر اثر انداز ہوتی ہے۔

(د) متغیر x کا اس کے حسابی اوسط سے انحراف کا مجموعہ ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل مدات کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

34, 34, 34, 34, 34, 34

حل : کیونکہ متغیر X کی تمام مدات ایک جیسی ہیں لہٰذا پہلی خصوصیت کے مطابق

حسابی اوسط = 34

مثال 2: متغیر X کی قیمتیں مندرجہ ذیل ہیں۔ 4, 5, 8, 6, 2

X کا حسابی اوسط معلوم کریں۔ اور حسابی اوسط معلوم کریں جب

(ا) ہندسہ پانچ کو ہر مد میں جمع کریں۔

(ب) ہندسہ 10 کو ہر مد سے ضرب دیں۔

(ج) ثابت کریں حسابی اوسط سے انحراف کا مجموعہ صفر ہے۔

حل: 'X' کی دی ہوئی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$X: \quad 4 \quad 5 \quad 8 \quad 6 \quad 2.$

ہم یہاں (ا) اور (ب) کے لیے بالترتیب دو متغیر X اور Y کا تعارف کروائیں گے اس لیے درج ذیل جدول تشکیل دیا جائے گا۔

لہٰذا

(a) $Y = X + 5$

(b) $Z = 10X$

	X	$Y = X + 5$	$Z = 10X$	$X - \bar{X}$
	4	9	40	−1
	5	10	50	0
	8	13	80	3
	6	11	60	1
	2	7	20	−3
کل تعداد	$\Sigma X = 25$	$\Sigma Y = 50$	$\Sigma Z = 250$	$\sum(X - \bar{X}) = 0$

اوپر والے جدول کے مطابق

$$\bar{X} = \frac{25}{5} = 5 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{50}{5} = 10 \quad ; \quad \bar{Z} = \frac{250}{5} = 50$$

ہم نے نوٹ کیا کہ

(ا) $\bar{Y} = 10 = 5 + 5 = \bar{X} + 5$

(ب) $\bar{Z} = 50 = 10\,(5) = 10\bar{X}$

جو کہ یہ ظاہر کرتا ہے کہ حسابی اوسط مرکز اور سکیل کے تبدیل ہونے سے اثر انداز ہوتی ہے۔

(ج) جدول کے آخری کالم کے مطابق $\sum(X - \bar{X}) = 0$ یعنی حسابی اوسط سے انحراف کا مجموعہ صفر ہے۔

6.3(iii) وزنی حسابی اوسط اور حرکتی (حسابی) اوسط کے نکالنے کا طریقہ

(الف) وزنی حسابی اوسط : (Weighted Arithmetic Mean)

کسی نمبر کی نسبتاً اہمیت اس کا وزن کہلاتی ہے۔ جب نمبرز $x_1, x_2, \ldots, x_n$ برابر اہمیت کے حامل نہ ہوں تو ہم انہیں مختلف اوزان $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ کے ذریعے ان کی اہمیت کے مطابق ملا دیتے ہیں۔

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

$\bar{x}_w$ وزنی حسابی اوسط کہلاتا ہے۔

مثال 1: مندرجہ ذیل مواد کا جدول ماہانہ آمدنی اور کسی فیکٹری میں ملازمین کی تعداد کو ظاہر کر رہا ہے۔ اس مواد کی مدد سے وزنی حسابی اوسط معلوم کریں۔

ملازمین کی تعداد	ماہانہ آمدنی (روپے)
4	800
22	45
20	100
30	30
80	35
300	15

حل: اوپر دی گئی معلومات میں ملازمین کی تعداد وزن (w) اور ماہانہ آمدنی متغیر (x) ہے۔

ملازمین کی تعداد (w)	ماہانہ آمدنی (x) (روپے)	xw
4	800	3200
22	45	990
20	100	2000
30	30	900
80	35	2800
300	15	4500
$\Sigma w = 456$	———	$\Sigma xw = 14390$

$$\bar{x}_w = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{14390}{456} = 31.5$$

(ب) حرکتی اوسط : (Moving Average)

حرکتی اوسط کی تعریف یوں کی جاسکتی ہے کہ مسلسل اوسط (حسابی اوسط) جو کہ ایک ہی وقت میں یا مہینوں یا سالوں کے تسلسل کے لئے معلوم کی جاتی ہے۔ اگر ہم 3 دن کی حرکتی اوسط معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم پہلے 3 دن کی حسابی اوسط معلوم کریں گے پھر ہم پہلے دن کو چھوڑ کر لگاتار بعد میں آنے والے دن کو اس گروہ میں جمع کریں گے۔ ہر تین دنوں کی اوسط کو ان تین دنوں کے درمیان والی جگہ کے مدمقابل لکھیں گے۔ یہ عمل تب تک جاری رہے گا جب تک تمام دن یعنی پہلے دن سے آخری دن تک ختم نہ ہو جائیں۔

مثال 2: مندرجہ ذیل حاضری کے ریکارڈ سے تین دن کی حرکتی اوسط معلوم کریں۔

Week	اتوار	پیر	منگل	بدھ	جمعرات	جمعہ	ہفتہ
1	24	55	28	45	51	54	60

حل:

ہفتے اور دن	حاضری	تین۔دن حرکتی اوسط	
		کل تعداد	اوسط
اتوار	24	—	—
پیر	55	107	107/3 = 35.67
منگل	28	128	128/3 = 42.67
بدھ	45	124	124/3 = 41.33
جمعرات	51	150	150/3 = 50.00
جمعہ	54	165	165/3 = 55.00
ہفتہ	60	—	—

پہلی تین قیمتوں کو جمع کر کے 107 آیا جو کہ ان تین قیمتوں کے درمیان لکھا گیا یعنی پیر کے مدمقابل اور پھر پہلی قیمت یعنی 24 کو گرا دیا گیا اور اگلی تین قیمتوں کو جمع کر کے حاصل جمع 128 حاصل ہوا جسے ان تین قیمتوں کے درمیان میں لکھا گیا۔ اسی طرح آگے بھی عمل کیا گیا۔ اور اوسط کے لئے کل تعداد/میزان کو 3 پر تقسیم کر کے جدول کے آخری کالم میں لکھ دیا گیا ہے۔

6.3(iv) وسطانیہ، چہارمی حصّہ اور عادہ کا گرافی اظہار
(Graphical Location of Median, Quartiles and Mode):

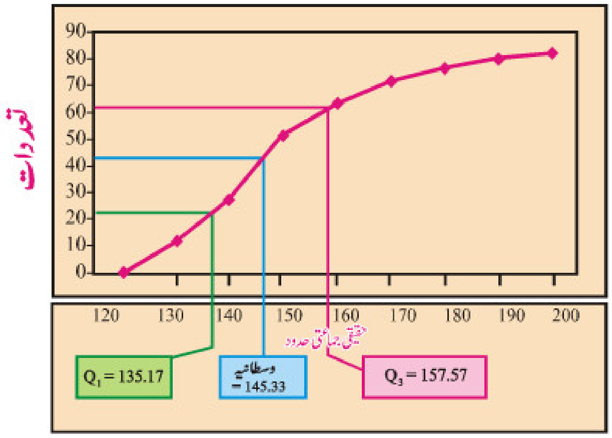
ہم وسطانیہ، چہارمی حصہ اور عادہ کے گراف کو درج ذیل مثالوں سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال 1: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کو استعمال کرتے ہوئے وسطانیہ اور چہارمی حصہ کی گراف پر نشاندہی کریں۔

حقیقی جماعتی حدود	مجموعی تعددات
120 سے کم	0
130 سے کم	12
140 سے کم	27
150 سے کم	51

160 سے کم	64
170 سے کم	71
180 سے کم	76
190 سے کم	80
200 سے کم	82

حل: ہم وسطانیہ اور چہارمی حصہ کی گراف پر نشاندہی کے لیے مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کو استعمال کریں۔



پیمانہ
X- محور : ایک چھوٹا سکیل = 10
Y- محور : 5 چھوٹے سکیل = 1

Q_1 معلوم کرنے کے لیے

(الف) $\left(\frac{n}{4}\right)$ ویں مد معلوم کریں جو کہ $\frac{82}{4} = 20.5$ ہے۔

(ب) Y- محور پر 20.5 کی گراف پر نشاندہی کریں اور y- محور (y-axis) سے افقی لائن کھینچیں جو کہ x- محور (x-axis) کے متوازی ہو اور کثیر الاضلاع کو چھوئے۔

(ج) اُس نقطے سے ایک عمودی لائن کھینچیں جو کہ X- محور کو چھوئے۔

(د) پہلے چوتھائی حصے Q_1 کی قیمت نوٹ کریں جہاں پر لائن X- محور کو ملتی ہے جو کہ 135.17 ہے۔

Q_2 یا وسطانیہ معلوم کرنے کے لیے

(الف) $2\left(\frac{n}{4}\right)$ ویں مد معلوم کریں جو کہ $2\left(\frac{82}{4}\right) = 41$ ہے۔

(ب) گراف کے Y- محور پر 41 کی نشاندہی کریں اور Y- محور سے افقی لائن کھینچیں جو کہ X- محور کے متوازی ہو اور کثیر الاضلاع کو چھوئے۔

(ج) اُس نقطے سے ایک عمودی لائن کھینچیں جو کہ X- محور کو چھوئے۔

(د) وسطانیے کی قیمت نوٹ کریں جہاں پر لائن X- محور کو ملتی ہے جو کہ 145.33 ہے۔

Q_3 معلوم کرنے کے لیے

(الف) $3\left(\frac{n}{4}\right)$ ویں مد معلوم کریں جو کہ $3\left(\frac{82}{4}\right) = 61.5$ ہے۔

(ب) Y- محور پر 61.5 کی گراف پر نشاندہی کریں اور Y- محور سے افقی لائن کھینچیں جو X- محور کے متوازی ہو اور کثیر الاضلاع کو چھوئے۔

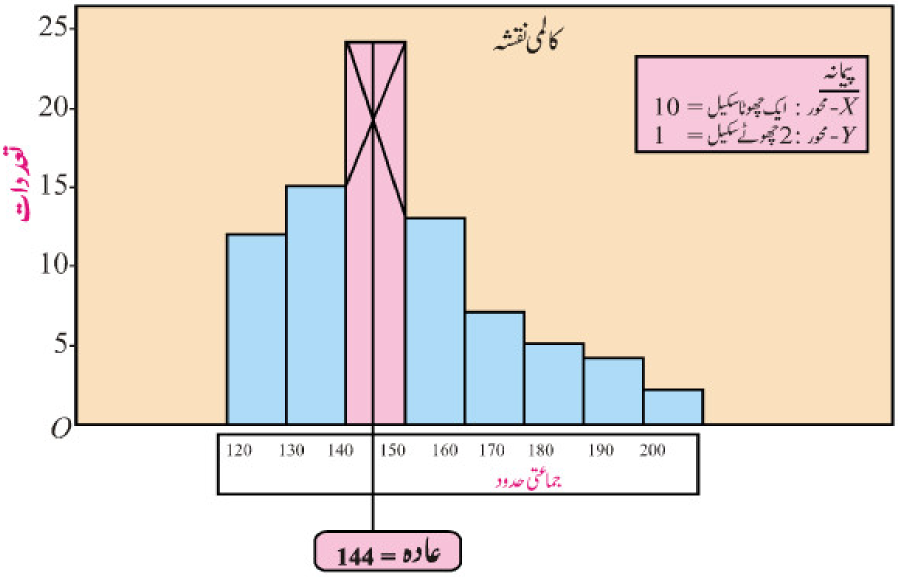
(ج) اس نقطے سے ایک عمودی لائن کھینچیں جو کہ X- محور کو چھوئے۔

(د) Q_3 کی قیمت نوٹ کریں جہاں پر لائن X- محور کو ملتی ہے جو کہ 157.57 ہے۔

مثال 2: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کی مدد سے عادہ کی گراف پر نشاندہی کریں۔

تنخواہیں (روپے)	اساتذہ کی تعداد
120 —— 130	12
130 —— 140	15
140 —— 150	24
150 —— 160	13
160 —— 170	7
170 —— 180	5
180 —— 190	4
190 —— 200	2

حل: کالمی نقشہ پر عادہ کو X- محور پر درج ذیل طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



اقدامات:

(i) سب سے اونچی مستطیل معلوم کریں جو عادہ جماعت / گروہ کو ظاہر کرتی ہے۔

(ii) اس مستطیل کے اوپر والے بائیں کونے سے ایک لائن اگلی مستطیل کے بائیں اوپر والے کونے کی طرف کھینچیں۔

(iii) اسی طرح اس مستطیل کے اوپر والے دائیں کونے سے ایک لائن پچھلی مستطیل کے دائیں اوپر والے کونے کی طرف کھینچیں۔

(iv) اس مستطیل کے اوپر والے سرے سے ایک عمود X- محور پر گرائیں جو ان دونوں لائنوں کے ہم تقاطع نقطہ سے ہوتا آئے۔

(v) جہاں پر وہ عمود X- محور پر ملتا ہے اس نقطے کی قیمت نوٹ کریں۔ یہی اس مواد کا عادہ کہلائے گا جو کہ دیے ہوئے مواد میں 144 ہے۔

مشق 6.2

-1 مرکزی رجحان کے پیمانے کے بارے میں آپ کیا جانتے ہیں؟ بیان کریں۔

-2 حسابی اوسط، اقلیدسی اوسط، ہم آہنگ اوسط، وسطانیہ اور عادہ کی تعریف لکھیں۔

-3 بلاواسطہ / تعریفی طریقہ سے مندرجہ ذیل مواد کا حسابی اوسط معلوم کریں۔

(i) 12, 14, 17, 20, 24, 29, 35, 45.

(ii) 200, 225, 350, 375, 270, 320, 290.

-4 بالواسطہ (مختصر / کوڈنگ) طریقہ سے مندرجہ بالا سوال نمبر 3 کا مواد استعمال کرتے ہوئے حسابی اوسط معلوم کریں۔

-5 گیارہویں جماعت میں طالبعلموں نے ریاضی میں جو نمبرز لیے وہ حسب ذیل ہیں۔ بلاواسطہ اور بالواسطہ طریقوں سے حسابی اوسط معلوم کریں۔

جماعت / گروہ	تعددات
0—9	2
10—19	10
20—29	5
30—39	9
40—49	6
50—59	7
60—69	1

-6 مندرجہ ذیل مواد کسی سکول کے بچوں کی عمر کو ظاہر کر رہا ہے بلاواسطہ اور مختصر طریقہ سے فرضی اوسط لے کر حسابی اوسط معلوم کریں۔(اشارہ $A = 8$ لیں)

جماعتی حدود	تعددات
4—6	10
7—9	20
10—12	13
13—15	7
کل تعداد	50

اور اقلیدسی اوسط اور ہم آہنگ اوسط بھی معلوم کریں۔

-7 مندرجہ ذیل مواد مختلف خاندانوں میں بچوں کی تعداد کو ظاہر کر رہا ہے۔ وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔
9, 11, 4, 5, 6, 8, 4, 3, 7, 8, 5, 5, 8, 3, 4, 9, 12, 8, 9, 10, 6, 7, 7, 11, 4, 4, 8, 4, 3, 2, 7, 9, 10, 9, 7, 6, 9, 5.

-8 جب پانچ سکّوں کو اچھالا گیا تو مندرجہ ذیل تعددی تقسیم ہیڈز کی تعداد کو ظاہر کر رہی ہے۔ عادہ معلوم کریں اور وسطانیہ بھی معلوم کریں۔

X (ہیڈز کی تعداد)	تعددات
1	3
2	8
3	5
4	3
5	1

-9 مندرجہ ذیل مواد لڑکوں کے اوزان (کلوگرام) کو ظاہر کر رہا ہے۔ حسابی اوسط، وسطانیہ اور عادہ معلوم کریں۔

جماعتی وقفہ	تعددات
1—3	2
4—6	3
7—9	5
10—12	4
13—15	6
16—18	2
19—21	1

-10 ایک طالبعلم نے امتحان میں مندرجہ ذیل نمبرز لیے۔
انگلش 73، اردو 82، ریاضی 80، تاریخ 67 اور سائنس 62

(الف) اگر اوزان ان نمبروں کے مطابق بالترتیب 4, 3, 3, 2اور 2 ہوں تو مناسب اوسط نمبر کیا ہوگا؟

(ب) اگر مساوی اوزان لیے جائیں تو اوسط نمبر کیا ہوگا؟

-11 چھٹیوں میں سیر و تفریح پر جانے والے ایک خاندان نے 21.3 لٹر پٹرول 39.90 روپے فی لٹر، 18.7 لٹر پٹرول 42.90 روپے فی لٹر اور 23.5 لٹر پٹرول 40.90 روپے فی لٹر میں خریدا۔ پٹرول کی اوسط فی لٹر قیمت معلوم کریں۔

-12 مندرجہ ذیل مواد کی مدد سے سادہ حرکتی اوسط معلوم کریں۔

سال	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
قیمتیں	102	108	130	140	158	180	196	210	220	230

-13 گراف کی مدد سے مندرجہ ذیل مواد کو استعمال کرتے ہوئے جوابات معلوم کریں اور پھر فارمولوں کی مدد سے ان جوابات کی پڑتال کیجیے۔

(الف) وسطانیہ اور چہارمی حصہ، مجموعی تعددی کثیر الاضلاع کی مدد سے معلوم کریں۔

(ب) کالمی نقشہ بنا کر عادہ معلوم کریں۔

حقیقی جماعتی حدود	تعددات
10—20	2
20—30	5
30—40	9
40—50	6
50—60	4
60—70	1

6.4 انتشاری پیمانے (Measures of Dispersion)

شماریات میں انتشار کا مطلب کسی مواد میں موجود مدّات کا پھیلاؤ ہے۔ اس پھیلاؤ کو مواد میں مندرجہ ذیل دو طریقوں سے دیکھا جاتا ہے۔

(الف) مواد کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی دو مدات کے درمیان پھیلاؤ۔

(ب) حسابی اوسط کے ارد گرد مدّات کا پھیلاؤ۔

انتشار معلوم کرنے کا مقصد یہ ہے کہ ہم درمیانی قیمت کے ارد گرد ہر آبادی (Population) کی اکائی کے رویہ کو پرکھ سکیں اور یہ دو مواد کا موازنہ کرنے میں بھی مددگار ثابت ہوتی ہے۔

ایسا پیمانہ جو مواد میں تبدیلی کی حد یا ڈگری معلوم کرنے کے لئے استعمال ہو انتشاری پیمانہ کہلاتا ہے۔

ہم یہاں مطلقاً چند اہم انتشاری پیمانوں کے بارے میں بات کریں گے۔

(الف) سعت (Range)

دیے گئے مواد میں سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی مد کے فرق کو سعت کہا جاتا ہے۔ اس کی پیمائش کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$\text{سعت} = \text{بڑی قیمت} - \text{چھوٹی قیمت}$$
$$= X_{\max} - X_{\min} = X_m - X_0$$

جہاں

$$X_{\max} = X_m = \text{سب سے بڑی مد}$$
$$X_{\min} = X_0 = \text{سب سے چھوٹی مد}$$

مسلسل گروہی مواد کے لیے سعت نکالنے کا فارمولا درج ذیل ہے۔

$$\text{سعت} = (\text{آخری گروہ کی بالائی جماعتی حد}) - (\text{پہلے گروہ کی زیریں جماعتی حد})$$

مثال 1: طالبعلموں کے اوزان کی سعت معلوم کریں۔

110, 109, 84, 89, 77, 104, 74, 97, 49, 59, 103, 62.

حل: دیے گئے مواد کے مطابق

$$X_m = \text{سب سے بڑی مد} = 110$$
$$X_0 = \text{سب سے چھوٹی مد} = 49$$
$$\text{سعت} = X_m - X_0$$
$$= 110 - 49 = 61$$

مثال 2: مندرجہ ذیل تعددی تقسیم کی سعت معلوم کریں۔

گروہ/جماعت	f
10 — 19	10
20 — 29	7
30 — 39	9
40 — 49	6
50 — 59	9
60 — 69	1
کل تعداد	$\Sigma f = 40$

حل: ہم مواد کو استعمال کرتے ہوئے حقیقی جماعتی حدود درج ذیل طریقے سے نکالیں گے۔

گروہ/جماعت	حقیقی جماعتی حدود	تعدداد
10 — 19	9.5—19.5	10
20 — 29	19.5—29.5	7
30 — 39	29.5—39.5	9
40 — 49	39.5—49.5	6
50 — 59	49.5—59.5	7
60 — 69	59.5—69.5	1

(پہلے گروہ کی زیریں جماعتی حد) − (آخری گروہ کی بالائی جماعتی حد) = سعت

سعت $= 69.5 - 9.5 = 60$

(ب) تغیریت (Variance)

تغیریت وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں، اُن کے مجموعہ کو ان کی مدات x_i، $(i = 1, 2, \ldots, n)$ کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ علامتی طور پر اسے S^2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$X \text{ کا تغیریت } = S^2 = \frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}$$

(ج) معیاری انحراف (Standard Deviation)

معیاری انحراف اس قیمت کا مثبت جذر ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں اُن کے مجموعہ کو ان کی مدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہو۔ مختصراً معیاری انحراف تغیریت کا مثبت جذر ہے۔ علامتی طور پر اسے S.D سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$X \text{ کا معیاری انحراف } = \text{S.D}(X) = \sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}}$$

تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کرنے کا طریقہ

ہم گروہی اور غیر گروہی مواد سے تغیریت اور معیاری انحراف نکالنے کے لیے درج ذیل فارمولے استعمال کرتے ہیں۔

غیر گروہی مواد کے لیے:

تغیریت کا فارمولا

$$\text{Var}(X) = S^2 = \frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2$$

معیاری انحراف کا فارمولا

$$\text{S.D}\,(X) = S = \sqrt{\left[\frac{\sum X^2}{n} - \left(\frac{\sum X}{n}\right)^2\right]}$$

مثال 3: چھ طالبعلموں کے ریاضی میں حاصل کردہ نمبرز درج ذیل ہیں۔ تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

طالبعلم	1	2	3	4	5	6
نمبرز	60	70	30	90	80	42

حل: فرض کیا طالبعلم کے نمبر $= X$

ہم تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کرنے کے لیے جدول میں مندرجہ ذیل کالم بنائیں گے۔

	X	X^2	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$
	60	3600	−2	4
	70	4900	8	64
	30	900	−32	1024
	90	8100	28	784
	80	6400	18	324
	42	1764	−20	400
کل تعداد	$\Sigma X = 372$	$\Sigma X^2 = 25664$	$\Sigma(X-\overline{X}) = 0$	$\Sigma(X-\overline{X})^2 = 2600$

$(\overline{X})$ حسابی اوسط $= \dfrac{\Sigma X}{n} = \dfrac{372}{6} =$ 62 نمبرز

تغیریت $= S^2 = \dfrac{2600}{6} =$ 433.3333 مربع نمبرز

فارمولا کو استعمال کرتے ہوئے

تغیریت $= S^2 = \dfrac{25664}{6} - \left(\dfrac{372}{6}\right)^2$

$\approx 4277.3333 - 3844 =$ 433.3333 مربع نمبرز

معیاری انحراف $= S \approx \sqrt{4277.3333 - 3844} = \sqrt{433.3333}$

$\approx$ 20.81666 نمبرز

گروہی مواد

تغیریت کا فارمولا

$$S^2 = \frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2$$

معیاری انحراف کا فارمولا

$$S = \sqrt{\left[\frac{\sum fX^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fX}{\sum f}\right)^2\right]}$$

مثال 4: مندرجہ ذیل مواد ٹافی کے ڈبوں کے اوزان (گراموں میں) ظاہر کر رہا ہے۔ تغیریت اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

X (gm)	f
4.5	2
14.5	10
24.5	5
34.5	9
44.5	6
54.5	7
64.5	1

حل: ہم مندرجہ ذیل جدول بنائیں گے۔

	X	f	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$f(X-\bar{X})^2$	fX	fX^2
	4.5	2	−28	784	1568	9	40.5
	14.5	10	−18	324	3240	145	2102.5
	24.5	5	−8	64	320	122.5	3001.25
	34.5	9	2	4	36	310.5	10712.25
	44.5	6	12	144	864	267	11881.5
	54.5	7	22	484	3388	381.5	20791.75
	64.5	1	32	1024	1024	64.5	4160.25
کل تعداد	$\Sigma X = 370$			$\Sigma(X-\bar{X}) = 2600$	$\Sigma f(X-\bar{X})^2 = 10440$	$\Sigma fX = 130$	$\Sigma fX^2 = 52690$

بنیادی فارمولا کے مطابق

$$S^2 = \frac{10440}{40} = 261 \text{ مربع گرام}$$

گروہی مواد والا فارمولا کے مطابق

$$S^2 = \frac{52690}{40} - \left(\frac{1300}{40}\right)^2$$
$$= 1317.25 - (32.5)^2 = 1317.25 - 1056.25$$

$= 261$ مربع گرام

معیاری انحراف کے فارمولے کے مطابق

$$S=\sqrt{\frac{10440}{40}}=\sqrt{261}=16.155 \text{ گرام}$$

$$S=\sqrt{\frac{52690}{40}-\left(\frac{1300}{40}\right)^2}=\sqrt{261}$$

$= 16.155$ گرام

مثال 5: طالبعلموں نے شماریات میں جو نمبرز لیے درج ذیل مواد ان نمبروں کو ظاہر کر رہا ہے گروپ A اور گروپ B کی اوسطی تبدیلی کا موازنہ کریں۔

X = نمبرز (گروپ۔اے)	Y = نمبرز (گروپ۔بی)
60	62
70	62
30	65
90	68
80	67
40	48

حل: اوسط تبدیلی کا موازنہ کرنے کے لیے ہم دونوں گروپوں کا معیاری انحراف معلوم کریں گے۔

	X	Y	$X-\bar{X}$	$(X-\bar{X})^2$	$Y-\bar{Y}$	$(Y-\bar{Y})^2$
	60	62	−2	4	0	0
	70	62	8	64	0	0
	30	65	−32	1024	3	9
	90	68	28	784	6	36
	80	67	18	324	5	25
	40	48	−20	400	−14	196
کل تعداد	$\Sigma X = 370$	$\Sigma Y = 372$		$\Sigma(X-\bar{X})^2 = 2600$		$\Sigma(Y-\bar{Y})^2 = 266$

گروپ۔اے کا حسابی اوسط $= \bar{X}=\frac{\sum X}{n}=\frac{370}{6}=61.67 \simeq 62$ نمبرز

گروپ۔بی کا حسابی اوسط $= \bar{Y}=\frac{\sum Y}{n}=\frac{372}{6}= 62$ نمبرز

$$\text{S.D}(X)=\sqrt{\frac{\sum(X-\bar{X})^2}{n}}=\sqrt{\frac{2600}{6}}=\sqrt{433.333}$$

$= 20.82$ نمبرز

$$S.D(Y) = \sqrt{\frac{\sum (Y-\bar{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{266}{6}} = \sqrt{44.333}$$

$= 6.66$ نمبرز

نوٹ: ہم نے دیکھا کہ گروپ۔بی کی تبدیلی کی شرح گروپ۔اے کی تبدیلی کی شرح سے کم ہے۔ پس معلوم ہوا کہ گروپ۔بی کے طالبعلموں کے نمبرز اپنے اوسط نمبروں سے قریب تر ہیں نہ کہ گروپ۔اے کے طالبعلموں کے نمبرز۔

مشق 6.3

-1 انتشار کے بارے میں آپ کیا جانتے ہیں؟ بیان کریں۔

-2 انتشاری پیمانے کی تعریف اور وضاحت کریں۔

-3 سعت، معیاری انحراف اور تغیریت کی تعریف لکھیں۔

-4 پانچ اساتذہ کی تنخواہیں (روپے میں) درج ذیل ہیں:

11500, 12400, 15000, 14500, 14800.

سعت اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

-5 (الف) معیاری انحراف 'S' معلوم کریں۔

(i) 12, 6, 7, 3, 15, 10, 18, 5

(ii) 9, 3, 8, 8, 9, 8, 9, 18.

(ب) درج ذیل مواد کا تغیریت معلوم کریں۔

10, 8, 9, 7, 5, 12, 8 6, 8, 2

-6 بتیس (32) چیزوں کی لمبائی درج ذیل ہے۔ اس تعددی تقسیم کی اوسط لمبائی اور معیاری انحراف معلوم کریں۔

لمبائی	20–22	23–25	26–28	29–31	32–34
تعددات	3	6	12	9	2

-7 مندرجہ ذیل مواد جو کہ نمبروں کو ظاہر کر رہا ہے۔ مواد کی مدد سے سعت معلوم کریں۔

نمبرز	(طالبعلموں کی تعداد) تعددات
31 — 40	28
41 — 50	31
51 — 60	12
61 — 70	9
71 — 75	5

متفرق مشق 6

1- کثیر الانتخابی سوالات

دیے گئے سوالات کے چار ممکنہ جوابات دیے گئے ہیں۔ درست کے لیے (✓) لگائیں۔

(i) گروہی تعددی جدول کہلاتا ہے۔

(a) مواد (b) تعددی تقسیم (c) تعددی کثیر الاضلاع

(ii) کالمی نقشہ مجموعہ ہے متصلہ

(a) مربعوں کا (b) مستطیلوں کا (c) دائروں کا

(iii) تعددی کثیر الاضلاع کئی پہلوؤں کی ________ ہے۔

(a) بند شکل (b) مستطیل (c) دائرہ

(iv) مجموعی تعددی جدول کہلاتا ہے۔

(a) تعددی تقسیم (b) مواد (c) کم تر مجموعی تعددی تقسیم

(v) مجموعی تعددی کثیر الاضلاع میں تعددات کو ________ کے مدمقابل نقشہ پر ظاہر کیا جاتا ہے۔

(a) درمیانی نقاط (b) بالائی جماعتی حدود (c) جماعتی حدود

(vi) حسابی اوسط ایسا پیمانہ ہے جو متغیر مقدار کی قیمت معلوم کرتا ہے متغیر کی تمام قیمتوں کے مجموعہ کو اُنکی ________ پر تقسیم کر کے:

(a) تعداد (b) جماعت/گروہ (c) مخرج

(vii) انحراف کا مطلب ہے کہ کسی متغیر مقدار کی قیمت سے ________ کا فرق۔

(a) مستقل مقدار (b) کالمی نقشہ (c) مجموعہ

(viii) تعددی تقسیم کی شکل میں مواد کہلاتا ہے۔

(a) گروہی مواد (b) غیر گروہی مواد (c) کالمی نقشہ

(ix) کسی متغیر مقدار کا ایک جیسی مدات مثلاً مستقل مقدار k کے لیے حسابی اوسط ہوتا ہے۔

(a) منفی (b) بذاتِ خود k (c) صفر

(x) حسابی اوسط ________ تبدیل کرنے سے اثر انداز ہوتا ہے۔

(a) قیمت (b) نسبت (c) منبع/ماخذ

(xi) حسابی اوسط ________ تبدیل کرنے سے اثر انداز ہوتا ہے۔

(a) جگہ (b) پیمانہ پیمائش (c) مقدار/خرچہ

(xii) کسی متغیر X کا اس کے حسابی اوسط سے انحراف کا مجموعہ ہمیشہ ________ ہوتا ہے۔

(a) صفر (b) ایک (c) ایک جیسا

(xiii) $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ مدات کے حاصل ضرب کا n^{th} مثبت جذر / رُوٹ کہلاتا ہے۔

(a) عادہ (b) حسابی اوسط (c) اقلیدسی اوسط

(xiv) $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ مدات کے معکوس کا معکوسی حسابی اوسط کہلاتا ہے۔

(a) اقلیدسی اوسط (b) وسطانیہ (c) ہم آہنگ اوسط

(xv) کسی مواد میں سب سے زیادہ مرتبہ آنے والی مد کہلاتی ہے۔

(a) عادہ (b) وسطانیہ (c) ہم آہنگ اوسط

(xvi) ایسا پیمانہ جو مواد کی درمیانی مد بتائے، کہلاتا ہے۔

(a) وسطانیہ (b) عادہ (c) حسابی اوسط

(xvii) ایسا پیمانہ جو مواد کو چار حصوں میں تقسیم کرے، کہلاتا ہے۔

(a) عشری حصّہ (b) چہارمی حصّہ (c) فیصدی حصّہ

(xviii) کسی مواد میں مدات کا پھیلاؤ کہلاتا ہے۔

(a) اوسط (b) انتشار (c) مرکزی رجحان

(xix) ایسا پیمانہ جو مواد میں تبدیلی کی شرح کو معلوم کرے ________ کا پیمانہ کہلاتا ہے۔

(a) انتشار (b) مرکزی رجحان (c) اوسط

(xx) کسی مواد کی انتہائی مدات کے فرق کو کہتے ہیں۔

(a) اوسط (b) سعت (c) چہارمی حصّہ

(xxi) x_i مدات کے حسابی اوسط سے انحراف کے مربعوں کے حسابی اوسط کو ________ کہا جاتا ہے۔

(a) تغیرت (b) معیاری انحراف (c) سعت

(xxii) X_i مدات کے حسابی سے انحراف کے مربعوں کے حسابی اوسط کے مثبت جذر کو ________ کہتے ہیں۔

(a) ہم آہنگ اوسط (b) سعت (c) معیاری انحراف

-2 درجِ ذیل سوالوں کے مختصر جواب لکھیں۔

(i) جماعتی حدود کی تعریف کریں۔

(ii) جماعتی نشان کی تعریف کریں۔

(iii) مجموعی تعدد کسے کہتے ہیں؟

(iv) تعددی تقسیم کی تعریف کریں۔

(v) کالمی نقشہ کسے کہتے ہیں؟

(vi) مرکزی رجحان کے دو پیمانوں کے نام بتائیں۔

(vii) حسابی اوسط کی تعریف کریں۔

(viii) حسابی اوسط کی تین خصوصیات تحریر کریں۔

(ix) وسطانیہ کی تعریف کریں۔ (x) عادہ کی تعریف کریں۔

(xi) ہم آہنگ اوسط کے بارے میں آپ کیا جانتے ہیں؟ بیان کریں۔

(xii) اقلیدسی اوسط کی تعریف کریں۔ (xiii) سعت کی تعریف کریں۔

(xiv) معیاری انحراف کی تعریف کریں۔

خلاصہ

- **سعت** کسی مواد کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی مد کے فرق کو کہتے ہیں۔
- کسی جماعت/گروہ کی چھوٹی اور بڑی قیمت اس کی **جماعتی حدود** کہلاتی ہیں۔
- بالائی جماعتی حد تک تعدد کے مجموعہ کو **مجموعی تعدد** کہتے ہیں۔
- کسی مواد کو مختلف گروہوں میں ترتیب دے کر اندراجی طریقہ (جدول کی صورت) میں لکھنے کو **تعددی تقسیم** کہتے ہیں۔
- **کالمی نقشہ** XY-پلین (سطح) پر تیار کردہ متصلہ مستطیلوں کا مجموعہ ہوتا ہے۔
- **مجموعی تعددی کثیر الاضلاع** مجموعی تعددی تقسیم سے کم تر گراف ہے۔
- **حسابی اوسط** ایک ایسا عمل/طریقہ/پیمانہ ہے جو متغیر کی تمام قیمتوں کے مجموعہ کو اُن کی تعداد پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔
- کسی متغیر مقدار سے مستقل مقدار کے فرق کو **انحراف** کہا جاتا ہے جیسے $D_i = x_i - A$
- **اقلیدسی اوسط** سے مراد $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ مدّات کے حاصل ضرب کا مثبت جذر ہے۔
- **ہم آہنگ اوسط** سے مراد وہ قیمت ہے جو $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ مدّات کے معکوس کا معکوسی حسابی اوسط لینے سے حاصل ہوتی ہے۔
- **عادہ** سے مراد وہ قیمت جو کسی مواد میں سب سے زیادہ بار آئے۔
- **وسطانیہ** ایک ایسا پیمانہ ہے جو کسی مواد کی درمیانی مد کا تعین کرتا ہے۔
- شماریات میں، **انتشار** سے مراد کسی مواد میں موجود مدات کا پھیلاؤ ہے۔
- **تغیرت** وہ قیمت ہے جو کسی مواد میں انحرافات کے مربعوں کو جو کہ حسابی اوسط سے لیے گئے ہوں اُن کے مجموعہ کو مدات کی تعداد سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔
- **معیاری انحراف** تغیرت کا مثبت جذر ہے۔